SESSION DE 1978

# MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures. — COEFFICIENT : 2

*Les trois exercices sont indépendants, et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.*

## PREMIER EXERCICE

On donne l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y'' + 2y' + 2y = f$$

où : $y$ est la fonction inconnue;

$f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ f(x) = e^{-x} \sin x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1° Intégrer (E) sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

(*On aura intérêt, pour la suite, à donner des noms différents aux constantes arbitraires qui figurent dans les solutions générales sur les deux intervalles.*)

2° Démontrer que (E) a, sur $\mathbb{R}$, une solution $y_0$ et une seule telle que :

$$y_0(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad y'_0(0) = -\frac{1}{2}$$

(*On n'oubliera pas de vérifier que $y_0$ est deux fois dérivable au point $x = 0$, et que $y''_0(0) + 2y'_0(0) + 2y_0(0) = f(0)$*).



3° Pour quelles valeurs de l'entier positif $n$ la fonction $y_0$ admet-elle un développement limité au voisinage de $x = 0$, à l'ordre $n$, suivant les puissances de $x$? Donner ce développement, lorsqu'il existe.

4° Démontrer que la série :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} y_0(n\pi)$$

est convergente, et trouver sa somme.

5° Démontrer que l'intégrale généralisée :

$$\int_0^{+\infty} y_0(x)\,dx$$

est convergente, et la calculer.

## DEUXIÈME EXERCICE

Soient :

V l'espace vectoriel réel des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, dont toutes les dérivées partielles sont continues en tout point;

$a$ un réel fixé;

$\Omega_a$ l'endomorphisme de V qui, à toute fonction $f : (x, y) \to f(x, y)$ de V, fait correspondre :

$$\Omega_a(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + a\frac{\partial f}{\partial y}.$$

On pourra utiliser le changement de variables :

$$u = x \qquad v = y - ax$$

1° Trouver :

*a*. Le noyau de $\Omega_a$.

*b*. Les fonctions de V dont l'image par $\Omega_a$ est une fonction $g$, donnée, de V. Appliquer au cas où $g(x, y) = x + y$.

*c*. Les valeurs propres et les fonctions propres de $\Omega_a$.

(*Un réel $\lambda$ et une fonction $f$ de* V, *non nulle, sont respectivement une valeur propre de $\Omega_a$ et une fonction propre de $\Omega_a$ associée à $\lambda$ lorsque $\Omega_a(f) = \lambda f$.*)

.../...

M 100

INSTITUT NATIONAL SUPERIEUR DE CHIMIE INDUSTRIELLE DE ROUEN

2° On pose : $\Omega_a^1 = \Omega_a$ et, pour tout entier $n$ supérieur à 1 :

$$\Omega_a^n = \Omega_a \circ \Omega_a^{n-1}$$

Exprimer $\Omega_a^n(f)$ pour $f$ dans V, à l'aide des dérivées partielles de $f$.

3° On donne l'équation :

$$\text{(E)} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2(x - y)$$

où l'inconnue $f$ est dans V.

*a.* Trouver les solutions de (E).

*b.* Soient $\varphi$ et $\psi$ deux fonctions données, définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, indéfiniment dérivables.

Démontrer qu'il existe une solution et une seule de (E) telle que, pour tout réel $x$ :

$$f(x, 0) = \varphi(x) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = \psi(x).$$

## TROISIÈME EXERCICE

Toutes les matrices de cet exercice sont à éléments réels.

Soient :

$n$ un entier strictement positif;

E l'espace vectoriel réel des matrices à $n$ lignes et une colonne.

On définit une norme sur E en posant, pour toute matrice X de E, d'éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ :

$$\|X\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|.$$

On admet que E, muni de cette norme, est complet.

Soient, d'autre part :

A une matrice carrée d'ordre $n$, fixée;

$a_{ij}$ l'élément de A situé à l'intersection de la $i^{ième}$ ligne et de la $j^{ième}$ colonne;

B une matrice de E, fixée.



On pose :

$$\alpha = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left( \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right).$$

1° Démontrer, pour tout élément X de E, l'inégalité :

$$\|AX\| \leqslant \alpha \|X\|.$$

2° On définit une suite $(X_k)$ $(k \geqslant 0)$ d'éléments de E en choisissant arbitrairement $X_0$ et en posant, pour $k \geqslant 0$ :

$$X_{k+1} = AX_k + B.$$

De plus, on suppose : $0 < \alpha < 1$.

Démontrer, pour $k \geqslant 0$ :

$$\|X_{k+1} - X_k\| \leqslant \alpha^k \|X_1 - X_0\|.$$

En déduire que la suite $(X_k)$ est une suite de Cauchy de E, et que l'équation :

$$X = AX + B$$

a, dans E, une solution unique $X^*$.

3° Démontrer, pour $k \geqslant 0$ :

$$\|X_k - X^*\| \leqslant \alpha^k \|X_0 - X^*\|.$$

4° *Application.* — On considère le système d'équations suivant, aux inconnues $x_1, x_2, x_3, x_4$ :

$$\text{(S)} \quad \begin{cases} x_1 = 0{,}2x_2 + 0{,}3x_3 + 0{,}1x_4 - 0{,}03 \\ x_2 = 0{,}1x_1 + 0{,}1x_3 + 0{,}2x_4 + 0{,}25 \\ x_3 = 0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}1x_4 + 0{,}08 \\ x_4 = 0{,}1x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}2x_3 + 0{,}02 \end{cases}$$

*a.* Démontrer que (S) a une solution unique $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*)$.

(*On ne demande pas de la calculer.*)

*b.* On admet que $x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*$ appartiennent tous à l'intervalle $]0, 1[$. Décrire un procédé de calcul par itération, qui permet d'obtenir des valeurs approchées de $x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*$ avec une incertitude absolue inférieure à $10^{-4}$, en partant des valeurs initiales $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

(*On ne demande pas d'appliquer le procédé, mais de le décrire.*)

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail